

Dev n° 5

Ref: J.P. Marco
 "Mathématiques L2" p8-9
 + Rombaldi p 766

Titre: Décomposition de Dunford + Exponentielle matricielle

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v de dim $n < +\infty$

Thm: (Dunford)

$f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ scindé t.q. $P(f) = 0$.

Alors, $\exists! (d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ t.q.:

- ① $f = n + d$
- ② $n \circ d = d \circ n$
- ③ n nilpotent
- ④ d diag.

De plus, n et d sont des polynômes en f .

Application:

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ t.q. χ_A scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors,

A diag $\Leftrightarrow e^A$ diagonalisable

Demo: (thm)

*Existence:

Notons $\chi_f = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ distincts et $m_i \geq 1$.

Par le lemme du noyau et thm Cayley Hamilton:

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \underbrace{\text{Ker} (u - \lambda_i \text{Id})^{m_i}}_{:= F_i}$$

Posez $d = \sum_{i=1}^r \lambda_i \text{Id}_{F_i} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \pi_i$ et $n = f - d$.

On a alors:

- d diagonalisable
- d polynôme en f (car π_i pol. en f)
- n polynôme en f
- n nilpotent car $n|_{F_i}$ p'et $\forall i \in [1, m]$
- $f = n + d$

*Unicité:

S.q. $\exists (d, n), (\tilde{d}, \tilde{n}) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifient ①, ②, ③ et ④.

On a:

$$d + n = \tilde{d} + \tilde{n} \Rightarrow d - \tilde{d} = \tilde{n} - n$$

* $d - \tilde{d}$ sont des pol. en f donc commutent et diag $\Rightarrow$ co-diag.

* $\tilde{n} - n$ nilpotent (par binôme de Newton)

Donc,

* $\tilde{n}-n$ nilpotent (par binôme de Newton)
 Donc, $d-\tilde{d}$ et $\tilde{n}-n$ sont diag. + nilpotent $\Rightarrow$ nul
 Donc, $d=\tilde{d}$ et $n=\tilde{n}$ $\square$

Remarque:

Par $A \in M_n(\mathbb{K})$ la décompo de Dunford de e^A est: $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$
 avec $A = D + N$.

Démo: (Application)

$\Rightarrow$ S.q. A diagonalisable.

Alors, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.q. $A = P^{-1} D P$ D diagonale.

On a:

$$e^A = P^{-1} e^D P \quad \text{diagonale}$$

$\Leftarrow$ S.q. e^A diagonalisable.

On a alors:

$$\begin{aligned} e^D (e^N - I_n) &= 0, \\ \Rightarrow e^N &= I_n \quad \text{car } e^D \text{ inversible.} \end{aligned}$$

On a donc

$$e^N = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} N^k = I_n \quad \text{où } q \geq 1 \text{ ordre de nilpotence de } N.$$

Donc, $P(x) = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} x^k$ est un polynôme annulateur de N et x^q polynôme

minimal de N va diviser P .

Donc, $q=1$ (car $\frac{1}{q!} = 1$ en identifiant les termes de degré q).

Donc, $N=0$ et A est diagonalisable $\square$

Annexe:

• $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ nilpotent.

Démo: (p 763 Rombaldi)

$A = D + N$ et D et N commutant.

$$\begin{aligned} \text{On a } e^A &= e^D e^N \\ &= e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} N^k \\ &= e^D \left(I_n + N \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} N^{k-1} \right) \\ &= e^D + N \underbrace{e^D \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} N^{k-1}}_W \end{aligned}$$

On a N nilpotente, qui commute avec W et $(N \cdot W)^q = N^q W^q = 0$.

Donc, NW nilpotent d'indice de nilpotence q .

De plus,

$$NW = e^D \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} N^k = e^D (e^N - I_n) \quad \square$$

• Méthode décomposition de Dunford

- 3) m est nilpotent car $m|_{F_k}$ l'est pour tout $k \in [1; m]$. ($m|_{F_k} = (f - \lambda \text{id})|_{F_k}$)

Si $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^m x_k$ avec $x_k \in F_k$, on prend $q := \max_k (d_k)$ on a $m^q(x) = \sum_{k=1}^m \underbrace{m^q(x_k)}_{=0} = 0$
car $m^q(x_k) = m^{q-d_k} \circ m^{d_k}(x_k) = 0$. Donc $m^q = 0$.

- Diagonalisabilité simultanée: Plus généralement si $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{L}(E)$ commutent 2 à 2 et sont diagonalisables, ($m \geq 2$)

elles sont co-diagonalisables: Par récurrence sur la dimension de E ($m = \dim(E)$)

$m=1$: Évident elles sont toutes déjà diagonales dans la base $\{1\}$.

Supposons le résultat vrai pour $m \geq 1$.

Si les f_i sont toutes des homothéties c'est évident.

Si on suppose $k \in [1; m]$ tel que f_k ne le soit pas.

f_k est diagonalisable. On suppose $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (où $n \geq 2$ du coup) les valeurs propres de f_k .

On a $E = E_{\lambda_1} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=2}^n E_{\lambda_i}}_F$ avec F de dimension ≥ 1

puisque chaque E_{λ_i} est un noyau d'un polynôme en f_k

et puisque les f_j commutent avec f_k ,

chaque E_{λ_i} est stable par f_j pour tout j . Ainsi, E_{λ_1} et F sont stables par tous les f_j .

Chaque endomorphisme restreint est diagonalisable (en effet si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, $\exists P \in K[x]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$. Si $F \subseteq E$ est stable par u , $P(u|_F) = P(u)|_F = 0$ donc $u|_F$ est diagonalisable.)

Par hypothèse de récurrence,

il existe g et g' une base de E_{λ_1} et une de F tel que les matrices des f_j sont diagonales. En concaténant les bases on a le résultat voulu.

- Diagonalisabilité simultanée: Plus généralement si $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{L}(E)$ commutent 2 à 2 et sont diagonalisables, ($m \geq 2$)

elles sont co-diagonalisables: Par récurrence sur la dimension de E ($m = \dim(E)$)

$m=1$: Évident elles sont toutes déjà diagonales dans la base $\{1\}$.

Supposons le résultat vrai pour $m \geq 1$.

Si les f_i sont toutes des homothéties c'est évident.

Si on suppose $k \in [1; m]$ tel que f_k ne le soit pas.

f_k est diagonalisable. On suppose $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (où $n \geq 2$ du coup) les valeurs propres de f_k .

On a $E = E_{\lambda_1} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=2}^n E_{\lambda_i}}_F$ avec F de dimension ≥ 1

puisque chaque E_{λ_i} est un noyau d'un polynôme en f_k

et puisque les f_j commutent avec f_k ,

chaque E_{λ_i} est stable par f_j pour tout j . Ainsi, E_{λ_1} et F sont stables par tous les f_j .

Chaque endomorphisme restreint est diagonalisable (en effet si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, $\exists P \in K[x]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$. Si $F \subseteq E$ est stable par u , $P(u|_F) = P(u)|_F = 0$ donc $u|_F$ est diagonalisable.)

Par hypothèse de récurrence,

il existe g et g' une base de E_{λ_1} et une de F tel que les matrices des f_j sont diagonales. En concaténant les bases on a le résultat voulu.

- Exercice colle:

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Quand a-t-on $X_{AB} = X_{BA}$.

* Cas A inversible:

$$X_{AB}(x) = \det(\text{Id}_x - AB)$$

* Cas A inversible :

$$\begin{aligned}
 \chi_{AB}(x) &= \det(\text{Id}x - AB) \\
 &= \det(AA^{-1}x - AB) \\
 &= \det(A) \det(A^{-1}x - B) \\
 &= \det(A^{-1}x - B) \det(A) \\
 &= \det(A^{-1}Ax - BA) \\
 &= \det(\text{Id}x - BA) \\
 &= \chi_{BA}(x)
 \end{aligned}$$

* Cas A non inversible:

$GL_n(\mathbb{C})$ dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Donc, $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset GL_n(\mathbb{C})$ t.q. $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$.

Comme $\det$ est une fonction continue (pol. en les coeff. de la matrice), on a :

$$\begin{array}{ccc}
 \chi_{A_n B}(x) & = & \chi_{B A_n}(x) \\
 \downarrow n & & \downarrow n \\
 \chi_{AB}(x) & & \chi_{BA}(x)
 \end{array}$$

Et donc $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x) \quad \square$

Dunford + Exp. de matriceE un $\mathbb{K}$ -e.v.

Thm:

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de pol. caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors,

 A diagonalisable $\Leftrightarrow e^A$ diagonalisable

Thm: (Dunford)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$.Alors, $\exists! (d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ t.q.① $f = d + n$ ② d diagonalisable③ n nilpotent ④ $d \circ n = n \circ d$ De plus, d et n sont des polynômes en f .R.q.: Par $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé. Notons D, N décompo de Dunford de A . On a: $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$

Démon: (Dunford)

* Existence:

 $\chi_f(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ distinctes et $m_i \geq 1$.Posons $F_i := \ker(f - \lambda_i \text{id})^{m_i}$.On a $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ Posons $d := \sum_{i=1}^r \lambda_i \text{id}|_{F_i}$ et $n = f - d$

On a:

- $f = n + d$ par construction
 - d diagonalisable
 - n nilpotent car $n|_{F_i}$ l'est
 - d pol. en f
 - n pol. en f
- } commutent.

Sbis

* Unicité:

S.q. $\exists (d, n)$ et $(\tilde{d}, \tilde{n})$ vérifiant 1), 2), 3) et 4).

On a

$$d + n = \tilde{d} + \tilde{n} \Rightarrow d - \tilde{d} = \tilde{n} - n.$$

- d et $\tilde{d}$ commutent + diagonalisable $\Rightarrow$ co-diag.
- $\tilde{n} - n$ nilpotent par le binôme de Newton.

Donc $d - \tilde{d} = \tilde{n} - n = 0$

$$\Rightarrow d = \tilde{d} \text{ et } n = \tilde{n} \quad \square$$

R.q.: $e^A = e^{D+N} = e^D e^N = e^D (I_n + e^N - I_n) = e^D + e^D(e^N - I_n)$

Démon: (thm)

 $\Leftrightarrow$ S.q. e^A diagonalisable.

Donc,

$$e^D (e^N - I_n) = 0$$

$$\Rightarrow e^N - I_n = 0$$

Notons q l'indice de nilpotence de N .

$$\text{On a: } \sum_{k=0}^q \frac{N^k}{k!} = I_n \Rightarrow \sum_{k=1}^q \frac{N^k}{k!} = 0$$

On a donc

 X^q pol. minimal de N

$$P(X) = \sum_{k=1}^q \frac{X^k}{k!} \text{ annule } N.$$

$$\text{Donc, } X^q \mid P(X) \Rightarrow q=1.$$

Donc, $N=0$ Donc $A=D$. A est diagonalisable. $\Leftrightarrow$ S.q. A diagonalisable, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.q.

$$A = P^{-1} D P \Rightarrow e^A = P^{-1} \underset{\substack{\text{D} \\ \text{diagonal}}}{e^D} P \quad \square$$